LIMITI NOTEVOLI di successioni

- Se P e Q sono due polinomi di grado k e h rispettivamente e

$$P(x) = ax^k + \text{termini di grado} < k, \quad Q(x) = bx^h + \text{termini di grado} < h$$

dove $a \neq 0$ e $b \neq 0$, allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \text{ e } a/b > 0; \\ -\infty & \text{se } k > h \text{ e } a/b < 0; \\ \dfrac{a}{b} & \text{se } k = h; \\ 0^+ & \text{se } k < h \text{ e } a/b > 0; \\ 0^- & \text{se } k < h \text{ e } a/b < 0. \end{cases}}$$

Lo stesso risultato vale con potenze reali positive (invece che intere), purché si possano **isolare le potenze massime** al numeratore e al denominatore.

- Sia $A \geq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = 0 \quad \text{se } A < 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} A^n = +\infty \quad \text{se } A > 1.}$$

Inoltre se $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha A^n = 0 \quad \text{se } A < 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{se } A > 1.}$$

- Sia $A > 0$, allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1.}$$

Più in generale se $0 < A_1 < A_2$ sono due numeri e se $\{a_n\}$ è una successione tale che $A_1 \leq a_n \leq A_1$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

- Siano $A > 1$ e $\alpha > 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_A(n)}{n^\alpha} = 0.}$$

- Dall'ultimo limite segue che qualunque sia $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1.}$$

- Sia $A \geq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n!} = 0.}$$

- Si ha:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

Sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima, cioè $a_n \to 0$, e tale che $a_n \neq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha \qquad \text{per qualunque } \alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}}$$